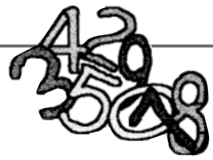
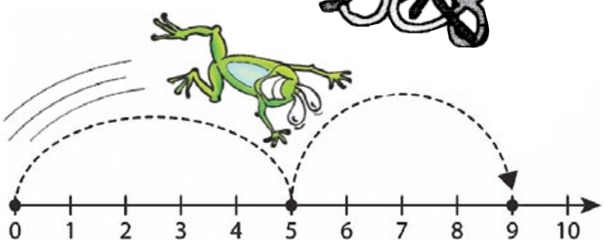
28

Kopf und Zahl

JOURNAL
des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.**
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**
28. AUSGABE, Herbst 2017
www.dyskalkulie.de





Der Zahlenstrahl

Eine taugliche Veranschaulichung, sofern man ihn richtig einsetzt.

Dr. Michael Wehrmann
Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Am Zahlenstrahl scheiden sich die Geister: Neben Befürwortern begegne ich in meinen Fortbildungen auch immer wieder Lehrkräften, die den Zahlenstrahl rundheraus ablehnen, weil er angeblich nur zum Zählen verführe. Was ist da dran? Lassen Sie mich das im Folgenden etwas beleuchten.

Man könnte sagen, am Zahlenstrahl komme man eh nicht vorbei, da er im Curriculum steht. Dies ist aber ein rein formales Argument – denn wenn er wirklich so schlecht wäre wie sein Ruf, sollte man sich wohl eher für die Änderung des Lehrplans einsetzen.

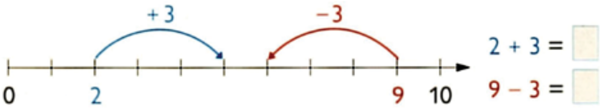
1. Der schlechte Ruf …

… liegt darin begründet, dass der Zahlenstrahl gern als Zählhilfe eingesetzt wird. Und manche Schulbücher geben sich richtig Mühe damit, dass dies auch passiert. Es fängt damit an, dass die Zahlen von vorn herein lediglich als *Positionen* dargestellt sind:

Man zählt die Striche ab, trägt die Zahl ein, fertig. Nachbarschaftsbeziehungen werden dann konsequent auch rein positional durchgeführt:

Die *kardinale* Bedeutung des Nachfolgers als *Inkrement*, also eins mehr, bleibt hier ganz außen vor. Eine positionale Bestimmung „kommt danach" reicht den Autoren – immerhin legen sie Wert auf eine korrekte Interpunktion.

Und folgerichtig wird in diesem Schulbuch (alle drei Abbildungen sind aus „Rechenwege", Verlag Volk und Wissen) konsequent zum zählenden Rechnen hingeführt:



In anderen Büchern wird sogar *jeder* Zählschritt mit einem einzelnen Bogen gekennzeichnet.

Manch wohlmeinender Pädagoge leitet seine Schüler zum Selberbasteln eines Zahlenstrahls an, an dem die Kinder ihre Ergebnisse auszählen können. Hier ein Beispiel eines solchen Exemplars, das durch das ständige Abgehen mit dem Stift schon merkliche Verschleißspuren aufweist:

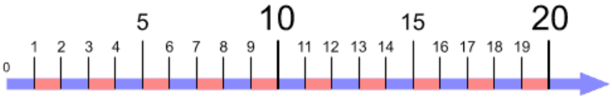
(*Quelle:* Fortbildungsvideo vom Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung gGmbH Osnabrück)

Inhalt

„Die Null ist eins und sie ist aber Luft!“

Das Zitat stammt von einem Schüler, der sich rein *zählend* am Zahlenstrahl bewegt und mit einer Tücke konfrontiert ist, wenn man sich nur an den Markierungsstrichen entlang hangelt: Unter der „5“ steht der *sechste* Strich! Um mit diesem „Problem“ umzugehen, hat der pfiffige Zähler sich eine Regel eingeprägt: Die „0“ hat zwar einen Strich („Die Null ist eins…“), man muss ihn aber beim Zählen ausblenden („… und sie ist aber Luft“). Damit hat er zwar kein Zahlverständnis ausgebildet, vermeidet aber Zählfehler.

Diesem „Problem“ stellen sich auch manche Schulbücher und Übungshefte, indem dieser „störende“ erste Strich schlicht weggelassen wird:



(*Quelle:* www.kinder-malvorlagen.com)

So besser nicht! Denn damit wird lediglich das Zählen erleichtert, statt auf den verständigen Einsatz des Zahlenstrahls hinzuarbeiten. Solche Arbeitsblätter sind eher dafür geeignet, eine Rechenschwäche zu *befördern*.

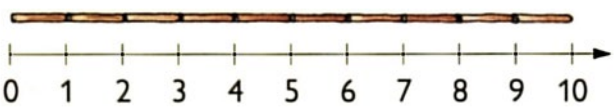
2. Das Prinzip der (Längen-) Einheit

Der Zahlenstrahl ist eine Veranschaulichungsform der Zahlen, die mit *Länge* operiert. Zahlen werden daran als *Strecke* dargestellt.

Wir besinnen uns auf das Grundprinzip der Kardinalzahl und ihrer Einheit eins. „Alle Zahlen sind Einsen“ – diese Aussage über den inkrementellen Zahlaufbau müssen wir auch am Zahlenstrahl verdeutlichen, um daran eine adäquate Zahlvorstellung zu entwickeln.

Nicht der (zweite) Strich an der Markierung „1“ veranschaulicht die Zahl eins, sondern es ist die *Strecke* von „0“ bis „1“:

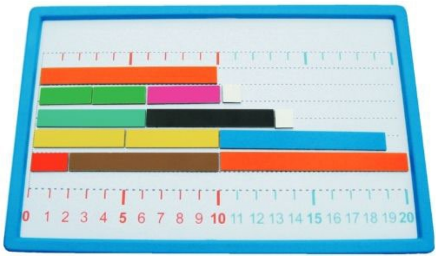
Nebenbei: Das zuvor angesprochene Arbeitsblatt aus dem Erstklassbuch „Rechenwege“ beginnt mit einer Abbildung, welche zehn so darstellt:



(*vollständige Seite:* www.zahlbegriff.de/rechenwege)

Zu Beginn wird hier das Nutzen der Einheitsstrecke eingeführt – allerdings ohne dies dann auf dem Arbeitsblatt weiter zu nutzen. Schade!

Anzahl wird am Zahlenstrahl mit *Länge* veranschaulicht. Will man mit den Kindern einen kardinalen Zahlbegriff als Basis zählfreien Rechnens ausbilden, muss dies bei der Darstellung von Zahlen sowie beim Vergleichen und Rechnen mit ihnen im Vordergrund stehen.



(*Quelle:* Verlag Lernspielkiste)

Gut geeignet ist dafür ein metallisch unterlegter Zahlenstrahl mit magnetischen Streifen unterschiedlicher Länge, die darauf angebracht werden (erhältlich im einschlägigen Lehrmittelvertrieb). Ganz nebenbei kommen damit die guten alten Cuisenaire-Stäbe zu neuen Ehren (vgl. Arnold Fricke; Heinrich Besuden: Mathematik in der Grundschule, Klett-Verlag 1982). Vergessen Sie dabei aber nie den Bezug auf die weiße Einheit eins, die Basis aller Zahlen!

Werden Zahlen konsequent mit Längen veranschaulicht und die Striche am Zahlenstrahl als Markierungen der Strecke von null bis zu dieser Zahl verstanden, so haben wir damit zwei Fliegen mit einer Klappe geschlagen: Neben der *kardinalen Zahlvorstellung* haben wir damit die Grundvoraussetzung für die *Längenmessung* in den höheren Klassen gelegt.

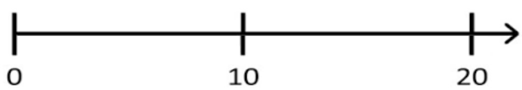
3. Praktische Anwendungen

Muss nun bei jeder Darstellung die gesamte Strecke von null ab veranschaulicht werden? Nein. Dies ist genau dann nicht mehr nötig, wenn dies mitgedacht wird, also beim Schüler ein kardinaler Zahlbegriff ausgebildet ist.

Wenn die Kinder also wissen, dass eine Position am Zahlenstrahl für den *Abstand* von null bis zu dieser Markierung steht, sie dies mit den Einheitsstrecken im Sinne von $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ auffüllen können, dann kann man mit den Positionen, also den Zahlmarkierungen selbst arbeiten. Anders ausgedrückt: Der Schüler muss die Anzahl mitdenken, die am Zahlenstrahl mit Länge dargestellt ist. Darauf aufbauend ergeben sich interessante Anwendungsmöglichkeiten.

Schätzen am leeren Zahlenstrahl

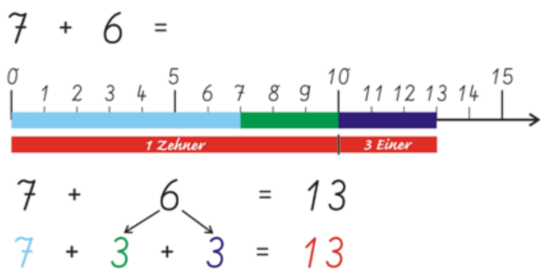
Ich bin ein Freund des leeren bzw. nicht komplett markierten Zahlenstrahls, um mit Kindern das schätzende Eintragen von Zahlen zu üben, damit sie so eine Größenvorstellung bekommen.



Die Aufgabenstellung für den Schüler besteht darin, eine vorgegebene Zahl am Zahlenstrahl zu markieren bzw. zu einer vorgegebenen Markierung die Zahl zu nennen. Dies ist auch gut geeignet, in der Gruppe diskutiert zu werden. Z. B. warum 15 genau zwischen 10 und 20 liegt, warum 8 näher bei zehn als bei 0 ist usw.

Zehnerübergang

Wird im Unterricht beim Rechnen bis hundert für den Zehnerübergang das Teilschrittverfahren eingeführt, bietet sich neben den Systemblöcken nach Zoltán Pál Dienes oder dem Rechenzug nach Reinhard Kutzer auch der Zahlenstrahl an, um den für das Verständnis des Zahlsystems wichtigen *Einheitenwechsel* zu veranschaulichen.



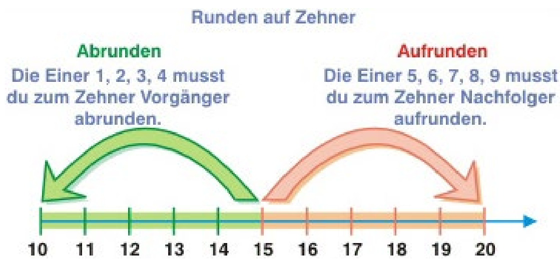
(*Quelle:* Fortbildungsunterlagen MLZ Dortmund)

Wichtig ist an dieser Stelle der (automatisierte) Rückgriff auf die Zahlzerlegungen und das Demonstrieren des Bündelns durch das Austauschen von zehn Einern zu einem Zehner. Auch dies geht mit dem magnetischen Zahlenstrahl gut.

Runden veranschaulichen

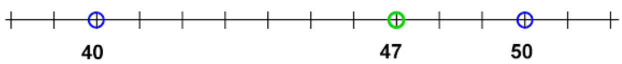
Ein Beispiel für eine sinnvolle Anwendung des Zahlenstrahls bietet die Darstellung des Rundens von Zahlen mit Hilfe der Zahlbeziehungen.

Die folgende Abbildung nutzt zwar einen Zahlenstrahl, bezieht sich aber gar nicht auf die Gründe für die zu erarbeitenden Rundungsregeln:



(*Quelle:* www.kleineschule.com.de)

Solche *inhaltsleeren* Merkregeln stehen einer nachvollziehbaren Erklärung der Rundungsregeln im Weg. Stattdessen sollte über den *Abstand* von Zahlen gesprochen werden. Beim Runden wird der *nächstgelegene* Zehner gesucht, und dies lässt sich am Zahlenstrahl gut veranschaulichen:



Am Anfang steht die Aussage „47 liegt zwischen 40 und 50“. Danach wird über den Abstand zu den beiden Nachbarzehnern gesprochen, diese Abstände werden verglichen und darüber der nächstgelegene Zehner bestimmt.

Anschließend werden die Sonderfälle besprochen. Zunächst sind dies Zahlen in der Mitte. Zu 35 etwa lässt sich *kein* eindeutig nächstgelegener Zehner bestimmen, da beide Nachbarn gleich weit entfernt sind. An dieser Stelle (und wirklich nur hier!) benötigen wir eine Regel, die sich *nicht* aus der Arithmetik ableiten lässt.

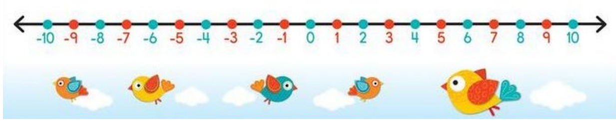
Bei uns ist es üblich, bei Zahlen, die in der Mitte liegen, stets auf den *nächstgrößeren* Zehner zu runden. Eine Notwendigkeit dafür gibt es nicht – es ist sogar ungünstig: Denn wenn mit gerundeten Zahlen weiter gerechnet wird, verfälscht sich das Ergebnis immer mehr in die größere Richtung. Im Unterschied dazu war es z. B. im Curriculum der DDR vorgegeben, bei geraden und ungeraden Zehnern *abwechselnd* in unterschiedliche Richtung zu runden. Und in Computerprogrammen wird in der Regel „eine Münze geworfen“ – das heißt, sie entscheiden nach dem Zufallsprinzip, ob auf- oder abgerundet wird.

Der zweite Sonderfall betrifft „glatte Zehner“. Ich kenne Schüler, die z. B. bei 40 mit der Merkregel „bis 4 rundet man ab“ auf die Einerziffer 0 blicken und dann auf „30“ abrunden. Andere Kinder sagen auch, 40 könne man gar nicht runden, weil es ja schon ein Zehner sei. Beiden ist die (falsche) Vorstellung gemein, eine Zahl müsse beim Runden stets verändert werden. Stattdessen sollte man auch hier nach dem nächstgelegenen Zehner fragen. Die Antwort lautet: Es ist er selbst, der Abstand ist null. Besprechen lässt sich diese Besonderheit z. B. mit der Analogie von Abständen zwischen Bushaltestellen. Ich möchte Weg sparen und von meinem Haus immer nur zur nächstgelegenen Haltestelle gehen. Was ist nun, wenn ich eine Haltestelle direkt vor meiner Haustür habe? Dann wähle ich natürlich genau diese und muss gar nicht gehen (= Abstand bzw. Weg null).

Zusammenfassung

Der Zahlenstrahl steht meines Erachtens zu Unrecht in einem schlechtem Licht. Schuld daran, dass er mitunter lediglich als Zählhilfsmittel eingesetzt wird, ist nicht er selbst. Vielmehr sind es ungeeignete Lehrwerke resp. seine ungenaue oder gar fehlerhafte Einführung im Unterricht.

Verständig eingeführt nutzt der Zahlenstrahl den Kindern, und den curricularen Vorgaben tut man so auch Genüge. Und nicht zuletzt ist damit auch eine fundierte Grundlage für die Fortsetzung in den negativen Bereich als Zahlen*gerade* in der Sekundarstufe gelegt…



(*Quelle:* www.carsondellosa.com)

Von der Menge zum Operieren mit Zahlen im Zahlenraum bis 10

Das Visualisieren und der visuelle Umbau von Anzahlen mit dem Einsatz von strukturierten Materialien

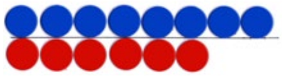
Angelika Albert und Hans-Joachim Lukow,
Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen
(Rechenschwäche / Dyskalkulie)

Wenn Kinder beginnen in ihrem Alltag Zahlen wahrzunehmen, lernen sie diese häufig als Zahlengedicht wie das Alphabet auswendig, und parallel dazu erfassen sie, dass diese Zahlwörter jeweils einem Objekt zuzuordnen sind (synchrones Zählen). Kinder zählen an ihren Fingern und sind zunächst der Auffassung, dass der 3. Finger den Namen „3“ hat. In dieser Phase wissen sie noch nicht, dass Zählen eine verkürzte Addition darstellt und „3“ die Menge aller mit Zahlworten benannten Finger bedeutet. Auch verfügen sie noch nicht über das Verständnis, dass beispielsweise „5“ die Einheit von 5 Einsen darstellt. Pädagogische Arbeit im Erstunterricht oder auch therapeutische Interventionen, die auf verfestigte Fingerzähler treffen, haben als wesentliche Aufgabe, am Ablösen der Vorstellungen von Zahlen als Positionen zu arbeiten.
In diesen Ausführungen geht es um die Entwicklung des Verständnisses des Enthaltenseins von Teilmengen in der jeweiligen Gesamtmenge sowie um den Aufbau des kardinalen Anzahlbegriffs, dass Zahlen aus Zahlen bestehen, bei der jede natürliche Zahl aus der vorhergehenden entsteht, vermehrt um eins.

Im ersten Schritt, im direkten Lerndialog mit dem Kind, ist in Erfahrung zu bringen, inwieweit Mengen/Anzahlen noch gezählt werden, oder ob diese bereits sicher erfasst werden können. Im darauffolgenden Lernschritt geht es darum, in der praktischen Verwendung von mindestens zwei Materialien, wie einem Zehnerfeld und Fingerbildern[1], Mengenstrukturen simultan bzw. quasi-simultan zu erfassen und damit den kardinalen Zahlbegriff zu erarbeiten.

Bevor mit dem systematischen Einüben der Zahlzerlegung bis 10 begonnen wird, ist zuerst der Zahlaufbau als tragfähiges Gerüst zu erarbeiten. Hierfür muss ein Kind verstehen, dass die Zahl 8 nach 7 kommt, weil 8 eins mehr als 7 und 7 eins weniger als 8 ist. Für die Erarbeitung des Zahlaufbaus sind Fingerbilder, Steckwürfeltürme oder auch Darstellungen von Chips im Zehnerfeld denkbar. Auf dieses Verständnis fußend ist dann der Vergleich zweier Mengen, die strukturiert dargeboten werden, abzusichern.

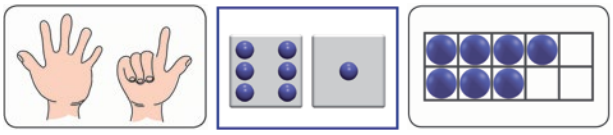
[1] vgl. Gaidoschik, 2007, S. 53 ff



Hierzu werden beispielsweise 6 rote und 8 blaue Chips hingelegt, um auf einen Blick festzuhalten, dass 2 blaue Chips keinen Partner haben und es folglich 2 blaue Chips mehr sind. Resultierend daraus sollte das Kind zu diesem Zeitpunkt auf der anschaulichen Ebene festhalten können: Es sind 6 rote und 8 blaue Chips und es sind 2 blaue mehr und 2 rote Chips weniger.

Warum überhaupt verschiedene Materialien für das Erfassen von Anzahlen?

Die Finger- und Würfelbilder sowie das Zehnerfeld haben der Sache nach kaum etwas Gemeinsames.



Denkt man sich den Mathematikunterricht weg, sind es Materialien aus der Anatomie, dem Spiel und der Schule. In der mathematischen Benutzung schafft der Lehrende den Gesichtspunkt, alles unter dem Aspekt der Anzahl zu betrachten. Kinder erschließen sich ihre Umgebung, indem sie Klassen/Gruppen/Kategorien bilden. Im mathematischen Anfangsunterricht ist der Schwerpunkt in der Klassifikation „Anzahlen“ zu legen. Um die gemeinsame Klasse „Anzahlen“ herauszuarbeiten, ist es notwendig, mindestens zwei Materialien zu verwenden, die unterschiedlich strukturiert sind, an denen die gleiche Anzahl präsentiert wird. Für ein Kind ist es alles andere als selbstverständlich, dass 5 und 2 Finger, 6 und 1 Würfelpunkt und 4 und 3 Kugeln im Zehnerfeld als die wertmäßig gleiche Anzahl, hier 7, wahrgenommen werden.

Übungen zum sicheren Erkennen von Anzahlen mit Fingerbildern im Wechsel mit dem Zehnerfeld[2]

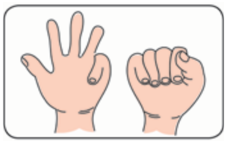
Um beim Kind einen gesicherten Aufbau innerer Vorstellungsbilder im Zahlenraum bis 10 zu erreichen, dienen Übungen zum zählfreien, blitzartigen Erkennen von Anzahlen und sollten regelmäßig wiederholt werden.

Für Übungen im Unterricht empfiehlt es sich, am Anfang einer jeden Unterrichtseinheit, den Schülern Abbildungen von Fingerbildern mit wechselnden Anzahlen, anschließend von Zehnerfeldern und/oder Würfelbildern kurz darzubieten und benennen zu lassen. Die von der Lehrkraft provozierte Geschwindigkeit in der Anzahlbenennung soll sukzessive dazu führen, dass nach und nach die Strukturen der Anzahlen erkannt und genutzt werden. Damit kann den Abzählstrategien, wie dem Fingerzählen, gleich von Beginn an entgegen gewirkt werden, um damit den Einstieg in ein sicheres Operieren mit Zahlen zu erreichen.

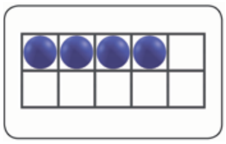
[2] Bei dem hier verwendeten Zehnerfeld handelt es sich um ein Feld mit 10 Kästchen, bei dem ein Umbruch nach jeweils 5 Kästchen erfolgt.

Beim Erfassen von Anzahlen bietet es sich zunächst an, mit Anzahlen bis 5 zu beginnen. Alle höheren Anzahlen leiten sich in der Folge systematisch von den hier gewonnenen Einsichten ab. Die sprachliche Begleitung der Handlungen und Aktivitäten unterstützt das Festigen der gewonnenen Einsichten (vgl. Scherer & Moser Opitz, 2010).

Übungsbeispiele:



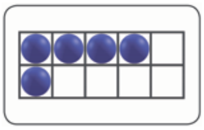
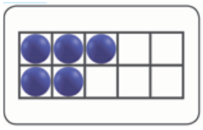
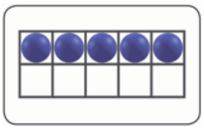
„Wie viele Finger sind aufgeklappt? Es sind 4 Finger, vorher waren es 3 Finger. Wie viele Finger sind eingeklappt?"



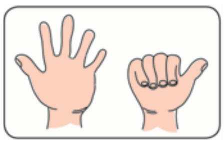
„Wie viele Kugeln sind im Zehnerfeld? Es sind 4 Kugeln, weil eine Kugel bis 5 Kugeln fehlt.

Mit den eigenen Fingern und/oder mit Fingerbildern werden zunächst die Anzahlen bis 5 erarbeitet und gleichzeitig der Zahlaufbau besprochen. Zur anschaulichen Demonstration werden die Finger einer Hand aufgeklappt, und es wird daran gezeigt, dass beispielsweise 4 Finger ein Finger mehr als 3 Finger und 3 Finger ein Finger weniger als 4 sind. In diesem Kontext sind aus dem Zahlaufbau um eins die ersten Rechenoperationen, die Addition und die Subtraktion, herauszuarbeiten. Das Kind sieht und erklärt dabei, dass zu den vorhandenen 3 Fingern ein weiterer Finger hinzugefügt wurde und so die Anzahl 4 entstanden ist, die in der Addition 3+1=4 dargestellt wird. Die Umkehrung ist genauso zu besprechen. Aus 4 Fingern werden durch Einklappen eines Fingers wieder 3 Finger, dargestellt in der Subtraktion 4-1=3. Um die Kardinalität der Anzahl dem Kind bewusst zu machen, ist mit den aufgeklappten Fingern[3] zu „winken".

Mit Übungen durch Verschieben von Chips auf dem Zehnerfeld oder durch Einzeichnen von Kugeln auf

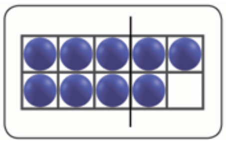
entsprechenden Arbeitsblättern verinnerlichen die Kinder die unterschiedlichen Strukturen derselben Anzahl, wie in diesem Beispiel 5=4/1, 5=3/2 oder 5=5/0.



Wenn nach dem Erarbeiten der Anzahlen im Zahlenraum bis 5 mit Fingerbildern mit dem Erkennen der Anzahl 6 fortgesetzt wird, ist ein Finger der nächsten Hand aufzuklappen.

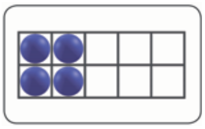
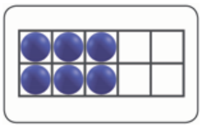
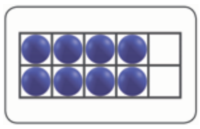
Im Folgenden wird von Kernfingerbildern gesprochen, wenn zunächst die Finger zu einer vollen Hand aufgefüllt werden, um dann sukzessive die Finger der anderen Hand hinzuzunehmen. Im Unterschied dazu handelt es sich um eine Zerlegung von 8, wenn 4 Finger einer Hand und 4 Finger der anderen Hand aufgeklappt sind. Diese lassen sich in das Kernfingerbild von 5 Fingern der einen Hand und 3 Finger der anderen Hand übertragen (Gleichung 4+4 = 5+3 = 8).

Die Übertragung von Fingerbildern auf ein zweites strukturiertes Material soll verhindern, dass das Kind nicht schematisch an einem Material haften bleibt. Zum anderen sind die Finger aber das Material, welches sie immer bei sich haben. Die Gefahr bei der Verwendung nur eines Materials besteht darin, dass kein flexibler Wechsel stattfindet und das Kind das Bild dieser Struktur in seiner Vorstellung mit der Anzahl gleichsetzt.

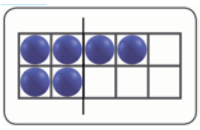


Das hier gewählte Zehnerfeld ermöglicht weitere Strukturen zu finden, die mit den Fingerbildern schlecht dargestellt werden können. Gedacht ist dabei an die Zerlegungen wie 6 in 4 und 2, 7 in 4 und 3 oder 9 in 6 und 3. Im Zehnerfeld lässt sich die Würfelsechs auf einen Blick erkennen (nach ein wenig Übung) und so die Zerlegung von 9 in 6 und 3 üben. Diese Zerlegungen mit Fingerbildern zu erarbeiten, ohne ein weiteres Hilfsmittel zu verwenden, wie einen Stift zwischen die Finger zu legen, die die beiden Teilmengen sichtbar macht, ist nicht möglich.

Bei dem von uns verwendeten Zehnerfeld, in der Aufteilung von 5 oben und 5 unten, lassen sich die Doppelstrukturen von 4 und 6 als Würfelbild erkennen. Im Gegensatz zum linearen Zehnerfeld, das in Schulbüchern favorisiert wird, ist mit diesem Zehnerfeld nicht nur die Analogie zur Fünferstruktur der Fingerbilder hergestellt, durch 5 Felder in der oberen bzw. in der unteren Reihe, sondern es können die Doppelstrukturen von 4, 6 und 8 auf einen Blick erfasst werden.

In der praktischen Anwendung des Zehnerfeldes kann das Kind selbst, aktiv handelnd, durch Verschieben von Plättchen neue Zerlegungen derselben Anzahl entdecken.

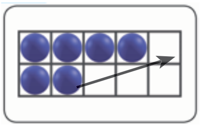


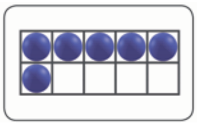
Übungsbeispiel: 6 Chips sind auf dem Zehnerfeld als Würfelvier und 2 Chips angeordnet. Sie können in dieser Anordnung simultan erfasst werden. Eine weitere Möglichkeit des Erkennens derselben Anzahl besteht darin, sie linear als 4 in einer Reihe oben und 2 Kugeln in der unteren Reihe, festzuhalten.

Im folgenden Beispiel schiebt das Kind nun einen Chip aus der unteren Reihe in die obere Reihe und erhält so eine neue Struktur von 5 Kugeln in einer Reihe (Kraft der Fünf) und 1 Kugel in der unteren

[3] Für die zu erarbeitende Anzahl 4 ist es gleichgültig, mit welchem Finger das Kind beginnt (gewohnheitsmäßig und aus anatomischen Gründen wird häufig zuerst der Daumen aufgeklappt).

Reihe. Damit sind zwei Zerlegungen von 6 in 4 und 2 und 5 und 1 festzuhalten.

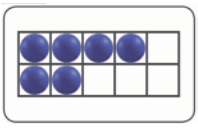




Mit jeder neu erkannten Struktur derselben Anzahl lernt das Kind neue Zerlegungen. Es ist damit immer weniger auf Verfahren, wie schematisches Auswendiglernen von Zahlzerlegungen, angewiesen, sondern entdeckt selbst durch Umstrukturieren der Mengen, welche Zahlen in der Gesamtmenge enthalten sind.

Für Übungen im Schulunterricht ist es empfehlenswert, jedem Kind ein Zehnerfeld (Kopiervorlage im Anhang von Kopf und Zahl) zum Erkennen von Anzahlen und zum Erarbeiten der Zahlzerlegung zur Verfügung zu stellen. Allein oder in der Gruppe, können jetzt sukzessive alle Anzahlen von 1 bis 10 erarbeitet und es kann notiert werden, in welche Teilmengen die Anzahlen zerlegt und zu einer Gesamtmenge wieder zusammengefasst werden.

Wie das geübt werden kann, möchten wir am Beispiel von 6 noch einmal exemplarisch zeigen:



1. Ich sehe in der oberen Reihe 4 und unten 2 Kugeln[4], zusammen sind es 6 Kugeln.
2. Ich sehe die Würfelvier und daneben 2 Kugeln, zusammen sind es 6 Kugeln.
3. Es fehlen 4 Kugeln bis 10 Kugeln und deswegen sind es 6 Kugeln.
4. Wenn ich eine Kugel von den 4 Kugeln aus der Würfelvier in die obere Reihe schiebe, dann sind es oben 5 und unten ist es 1 Kugel. Zusammen sind es 6 Kugeln.

Damit sind folgende Zerlegungen erarbeitet: 4+2 = 10-4 = 5+1 = 6.

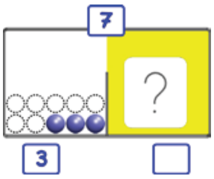
Auf das strukturierte Erfassen von Mengen und die Verknüpfung mit verschiedenen Materialien wurde bereits in Kopf und Zahl Nr. 15 von Andrea Timmerevers und Ulrike Linnemann in dem Artikel „Fingerrechnen und Zehnerfeld“ die Verwendung von Fingerbildern und Zehnerfeld hingewiesen.

Unser Artikel „Von der Menge zum Operieren mit Zahlen“ versteht sich als Vertiefungsartikel der dort besprochenen Inhalte. Die beiden Autorinnen Timmerevers und Linnemann führen in ihrem Artikel bereits aus, dass die Kinder im Unterricht Strukturen der Fingerbilder und des Zehnerfeldes miteinander kombinieren sollten. „Die Kinder müssen dabei lernen, strukturierte Bezüge erfassen zu können, sowohl quantitativ als auch qualitativ. Dabei kommt es darauf an, ihnen erst das Sehen von Anzahlen und das Enthaltensein von kleineren Mengen anhand ihrer Finger beizubringen“, so die Therapeutinnen. „Diese Bezüge brauchen Kinder als Verständnisgrundlage, bevor sie die Aufgabe (3+2) – also die symbolische Ebene – nachvollziehen können. Ist dieses grundlegende Anzahlverständnis und die Einsicht in die Zahlbeziehungen nicht vorhanden, besteht die Gefahr, dass die Schüler ein rein schematisches Wissen ohne Mengenbezug erlangen, wenn zu früh mit der Aufgabe in Ziffernform im Mathebuch begonnen wird. Dann gelingt ihnen auch der Transfer zu naheliegenden Aufgaben wie 4+2 oder aber zur Umkehraufgabe 6-2 nicht oder nicht zuverlässig und die Schüler greifen auf das zurück, was sie haben und können: Finger, an denen sie Ergebnisse ohne Zusammenhänge immer wieder einzeln abzählen.“

[4] Bei den Abbildungen im Zehnerfeld sind Kugeln eingezeichnet. Im Unterricht können Chips oder Steckwürfel verwendet werden.

Mit der Schüttelbox mit innenliegendem Zehnerfeld Mengen und Anzahlen erkennen und Zahlen zerlegen

Als hilfreiches Lernmittel zum Erlernen der Zahlzerlegung hat sich die Schüttelbox mit der Kraft der Fünf erwiesen. Sie ist um die Variante mit einem integrierten Zehnerfeld erweitert worden, die das visuelle Erfassen der Anzahlen unterstützt.



Je nach Lernstand des Kindes kann diese Schüttelbox offen (ohne Kartonschuber) oder verdeckt eingesetzt werden. Die offene Box erlaubt die Arbeit mit zwei sichtbaren Teilmengen. Die Übung mit der offenen Schüttelbox besteht darin, jede einzelne Teilmenge simultan bzw. quasi-simultan zu erfassen, um darüber im nächsten Schritt die Gesamtmenge zu bestimmen. Wird mit dem Kartonschuber eine Seite der Schüttelbox abgedeckt, ist die fehlende Teilmenge zu ermitteln. Es gilt nun ausgehend von der gegebenen Gesamtmenge und einer bekannten Teilmenge auf die fehlende Teilmenge hinter dem Fragezeichen zu schließen.

Direkter Anzahlvergleich und visueller Umbau mit dem Zehnerfeld und der Schüttelbox

In diesem und in den folgenden Übungsbeispielen geht es darum, die fehlende Teilmenge in der Schüttelbox durch einen direkten Anzahlvergleich oder durch einen visuellen Umbau zu ermitteln.

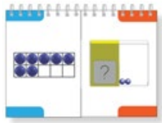
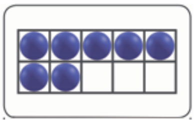
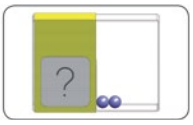
Hierzu ist es notwendig, einen Vergleich von zwei gleichgroßen Mengen durchzuführen, dargestellt im Zehnerfeld und in der Schüttelbox. Im Zehnerfeld ist die Gesamtmenge sichtbar, in der Schüttelbox ist eine Teilmenge zu erkennen, die andere ist verdeckt. Im Folgenden werden Darstellungen aus dem Schüttelblock (Schüttelbox-Programm, vgl. Finster & Lukow) verwendet[5]. Die hier gezeigten Übungen können aber auch mit einem Zehnerfeld und einer Schüttelbox durchgeführt werden.

[5] Der Schüttelblock ist Teil des Schüttelbox-Programms. Zehnerfelder und Schüttelboxen mit Anzahlen bis 10 sind bereits als Abbildungen im Block. Ein Umschlagen der Seiten macht einen zügigen Wechsel in der Anzahlerkennung und Zahlzerlegung möglich, der für ein Automatisieren vorteilhaft ist. Neben dem Schüttelblock besteht das Konzept aus 2 CDs zur Anzahlerkennung und Zahlzerlegung, 2 Schüttelboxen, einem Handbuch und einem Schüttelbox-Arbeitsheft, www.schuettelbox-programm.de.

Der direkte Anzahlvergleich

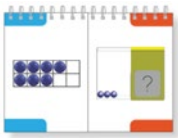
Übungsbeispiel:

Die Gesamtmenge, hier 7, gibt das Zehnerfeld (links) vor. In der Schüttelbox (rechts) befindet sich die gleiche Gesamtmenge. Hier ist die eine Teilmenge 2 sichtbar.

Schüttelblock	Mit Zehnerfeld und Schüttelbox
	 

In diesem Beispiel ist die Gesamtmenge 7 im Zehnerfeld (links) über die Struktur von 5 Kugeln oben und 2 Kugeln unten oder alternativ als Würfelvier und 3 Kugeln dargestellt. Nun werden die beiden sichtbaren Kugeln in der Schüttelbox (rechts) mit den beiden unteren Kugeln im Zehnerfeld abgeglichen und so die fehlende Teilmenge 5 erschlossen. Diesen Abgleich nennen wir direkter Anzahlvergleich.

Übungsbeispiel:



Die Teilmenge 3 in der offenen Kammer der Schüttelbox ist den 3 Kugeln in der unteren Reihe im Zehnerfeld (Gesamtmenge 7) gegenüber zu stellen.

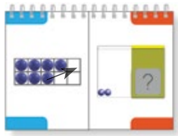
Auf der rechten Seite des Schüttelblocks sind 3 Kugeln in der Schüttelbox in der offenen Kammer zu erfassen und dann mit den 3 Kugeln der Gesamtmenge in der unteren Reihe im Zehnerfeld abzugleichen. Auf die Anzahl der fehlenden Teilmenge hinter dem Fragezeichen der Schüttelbox kann jetzt mit einem Blick auf die obere Reihe im Zehnerfeld geschlossen werden: Es müssen 4 Kugeln sein. Während der Übungen ist der Schüler angehalten, seine Beobachtungen zu verbalisieren.

Der visuelle Umbau von Anzahlen

Beim direkten Anzahlvergleich kann die gleiche Struktur der Teilmenge in der Schüttelbox und in der Gesamtmenge des Zehnerfeldes entdeckt und somit direkt abgeglichen werden. Damit ist zählfrei auf die fehlende Teilmenge in der Schüttelbox zu schließen. Ein visueller Umbau[6] von Anzahlen wird dann notwendig, wenn sich die gleiche Anzahl nicht auf einem Blick entdekken lässt. Dabei ist die Gesamtmenge vor dem geistigen Auge des Kindes in eine neue Struktur umzubauen.

Übungsbeispiel:

Es ist mit der Frage zu beginnen: „Wie groß ist die Teilmenge, die sich hinter dem Fragezeichen befindet, wenn die Gesamtmenge 7 und die sichtbare Teilmenge 2 in der offenen Kammer der Schüttelbox ist?“ Für die Ermittlung der fehlenden Teilmenge bieten sich zwei Möglichkeiten an:



1. Die Gesamtmenge im Zehnerfeld ist 7 und kann als 4 Kugeln in der oberen Reihe und 3 Kugeln in der unteren Reihe erfasst werden. Diese Darstellung soll nun mit den 2 Kugeln in der Schüttelbox abgeglichen werden. Da kein direkter Abgleich vorgenommen werden kann ist es jetzt notwendig, die Gesamtmenge im Zehnerfeld visuell umzubauen. Das Kind schiebt nun vor dem geistigen Auge eine Kugel aus der unteren Reihe, in der sich 3 Kugeln befinden, in die obere Reihe. Es entsteht damit eine andere Anordnung. In der oberen Reihe sind es nun 5 Kugeln und in der unteren Reihe 2 Kugeln. Jetzt ist wieder der Anzahlvergleich direkt möglich. Somit entsprechen die 5 Kugeln in der oberen Reihe der gesuchten Teilmenge in der Schüttelbox.
2. Es ist ebenfalls möglich in der Gesamtmenge eine Würfelvier und 3 weitere Kugeln zu erkennen. Auch hier ist wieder eine Kugel aus der unteren Reihe in die obere Reihe zu schieben. Die gesuchte Teilmenge ist damit 5.

Das Vergleichen der Anzahlen und das damit verbundene visuelle Umstrukturieren der Mengen führen dazu, dass die Zahlzerlegung vom Kind verständig erlernt und verinnerlicht wird.

Zitierte Literatur und Links

Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwäche vorbeugen* - Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern. Oebvhpt VerlagsgmbH und Co.KG, Wien 2007

Finster, E., Lukow, H. (2014). Handbuch zum Schüttelbox-Programm, Osnabrück

Moser Opitz, E. (2007). Erstrechnen. U. Heimlich & F. Wember (Hg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis.* (S. 253-265). Stuttgart: Kohlhammer

Timmerevers, A., Linnemann, U. (2011) Kopf und Zahl Nr. 15, *Fingerrechnen und Zehnerfeld*

Albert, A., Lukow, H. Schüttelbox-Arbeitsheft, *Zahlzerlegung mit der Schüttelbox*, 2017, Hg. Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen (Rechenschwäche/Dyskalkulie)

[6] Der visuelle Umbau, der durch ein Umstrukturieren der gegebenen Anzahl visuell (nicht aktiv handelnd) vor dem geistigen Auge des Kindes erfolgt, kann auch mit anderen Materialien als mit dem hier exemplarisch vorgestellten Zehnerfeld, also mit Fingerbildern, Mayazahlen, geübt werden. Weitere Beispiele im Handbuch zum Schüttelbox-Programm.

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund; Katja Rochmann, Osnabrück
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

ILSA 1

Individuums- und **L**ernentwicklungszentriertes **S**creening **A**rithmetik

Screening- & Förderprogramm für den Beginn der Klasse 1

Wir haben ILSA für alle Kinder entworfen, für die lernschwachen und auch die lernstarken. ILSA wurde zur Erweiterung der Hilfeangebote für Schulen entwickelt: ILSA ist ein Screening- und Förderprogramm für den mathematischen Anfangsunterricht.

ILSA 1 ist …

- ein qualitatives, schulalltagstaugliches Screening im Interview-Verfahren für den Beginn der ersten Klasse. Es ist qualitativ im Sinne einer Lernprozessanalyse für alle Kinder der ersten Jahrgangsstufe angelegt inkl. Kontrollfunktion für das Ende des Schuljahres.
- ein Förderprogramm, das mit dem Eintritt in die Schule für alle Kinder angewandt werden kann. Es integriert sich in gängige Didaktikmodelle, ist für Inklusionskinder und gute Schüler einsetzbar und kann in der Klassengemeinschaft oder im Förderunterricht angewandt werden.

Die ILSA-Fortbildung umfasst drei Fortbildungstage:

- theoretische Grundlagen der Zahlbegriffsbildung
- Auswertung des Screenings mit Videobeispielen
- Einsatz der Dokumentations- und Trainingssoftware

Die Fortbildungen für die Lehrkräfte finden zentral in Braunschweig statt. Bei größerer regionaler Nachfrage (ab etwa zehn Schulen) ist die Durchführung auch an einer Einrichtung vor Ort möglich.

Die Schule erhält eine umfangreiche Materialsammlung: u. a. den ILSA-Kasten mit den Zahlenkarten, 100 Screening-Bögen, Begleitbücher und die Auswertungs- und Trainings-Software. Nach Erwerb der Lizenz entstehen der Schule keine Folgekosten.

Interesse am Einsatz von ILSA?

Bei Interesse an dem Einsatz von ILSA an Ihrer Schule nehmen Sie bitte unverbindlich Kontakt mit uns auf. Sie erhalten dann weitere Informationen über das Screening-Konzept, Fortbildungstermine und die Kosten für Fortbildung, Material und Lizenzierung.

ILSA@zahlbegriff.de oder Tel. 0531-12167750

Entwicklung:

MATHEMATISCH LERNTHERAPEUTISCHES ZENTRUM (MLZ)
Dortmund - Bochum - Lüdenscheid

Mathematisch Lerntherapeutisches Institut (MLI)
Düsseldorf

IML

Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Beratungs- und Forschungseinrichtung
zur Diagnose, Therapie und Prävention
der Rechenschwäche/Dyskalkulie

- Qualitative Förderdiagnose
- Wissenschaftliche Beratung
- Integrative Lerntherapie
- Spezifische Lehrerfortbildung

So erreichen Sie das IML Braunschweig
38100 Braunschweig, Steinweg 4 (Haltestelle Rathaus)
Telefon 05 31-12 16 77 50, Fax 05 31-12 16 77 59
per E-Mail: info@iml-braunschweig.de
im Internet: http://www.iml-braunschweig.de
Telefonsprechstunde: Di–Do, 12–14 Uhr
(nicht in den Ferien)

Schulinterne Lehrkräftefortbildung (SchiLF)
Wir sind offizieller Fortbilder des Kompetenzzentrums Lehrerfortbildung der TU Braunschweig und bieten u. a. folgende Seminare an:

- **Qualitative Diagnostik von Rechenschwäche**
  Erkennen von Dyskalkulie im diagnostischen Gespräch
- **Prävention/Vorbeugung in der ersten Klasse**
  Prozessbegleitende Beobachtung und Gegenstrategien
- **Rechenschwäche in der Sekundarstufe I**
  Probleme mit Dyskalkulie in weiterführenden Schulen

Haben Sie Interesse an einer Veranstaltung, so fordern Sie von uns bitte unser ausführliches Fortbildungsprogramm an.

Abonnement unserer halbjährlichen Zeitschrift
Der Bezug von „Kopf und Zahl" ist beim IML Braunschweig sowohl in elektronischer als auch in gedruckter Form möglich. Bitte beachten Sie hierfür das beiliegende Bestellformular.

Das IML Braunschweig ist Mitglied im

Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung
(gemeinnützige Gesellschaft mbH)

http://www.arbeitskreis-lernforschung.de

Auf der Homepage finden Sie viele weitere Informationen zur Thematik Dyskalkulie, Buchtipps und einen Pressespiegel.